L' ORDINATEUR

par

Georges PAPY

1987

PREFACE

La progression de l'humanité sur la voie de la civilisation a été marquée par trois artéfacts généraux déterminants, appelés semble-t-il à devoir le rester, nommés ici de manière symbolique le bras, le travail et l'intelligence artificiels.

Cent siècles de sociétés agricoles artisanales se sont développées grâce au bras artificiel par lequel l'homme a prolongé son bras naturel et perfectionné sa main nue. Outil, arme ou instrument, le bras artificiel revêt des formes multiples et diverses selon l'époque ou les circonstances : bâton, massue, gourdin, épieu, lance, épée, javelot, flèche, arc, couteau, burin, plume, crayon, pinceau, levier, truelle, fouet, lasso, pelle, pioche, herse, soc, charrue, rênes, balai, marteau, poinçon, vrille, archet, aiguille, alène, bêlier, règle, équerre, compas, perche, canne, quenouille, tour, levier, roue, cure-dents, métier à tisser ... Pendant toute l'ère agricole artisanale, armes, outils et instruments sont exclusivement actionnés par du travail naturel, commandé par de l'intelligence naturelle. Ce travail naturel est consenti par l'homme à la sueur de son front, prêté par les animaux qu'il a domptés et domestiqués, ou prodigué par vents et marées, courants d'eau et autres forces de la nature, tandis que l'intelligence naturelle est celle des hommes, des femmes et des animaux. En soi, le crayon est inerte : c'est le travail naturel de la main de l'homme qui lui fait écrire ce que lui commande son intelligence (naturelle). La période agricole artisanale magnifie le bras artificiel, mais en reste au travail naturel et à l'intelligence naturelle.

Il y a quelques siècles à peine, la découverte du travail artificiel, produit à partir de la houille, du pétrole, et plus tard de l'uranium ... inaugure l'ère industrielle. Le gigantisme s'empare de l'outil qui s'évade de la main de l'homme et d'immenses concentrations humaines, technologiques et capitalistes s'installent. L'agriculture persiste. Bien que la machine puisse désormais se charger de certains labeurs, travail naturel et travail artificiel coexistent. Les conglomérats industriels sont truffés, à tous niveaux, y compris les plus bas, de cellules d'intelligence confiées à des prolétaires. L'organisation capitaliste vise non seulement le travail, mais aussi et surtout l'intelligence. A la chaîne de montage, l'ouvrier spécialisé effectue une multitude de gestes coordonnés par son cerveau. Loin du travailleur lourd, il dispense une intelligence naturelle répétitive mal payée.

Avec la découverte, le développememt et l'adoption de plus en plus généralisée de l'intelligence artificielle dispensée par une foule d'ordinateurs de toutes tailles et finalités, l'humanité vient d'entrer dans l'ère informatique, où les trois éléments fondamentaux outil, travail, intelligence se rencontrent et s'utilisent chacun concurremment en version naturelle et en version artificielle. Comme l'outil prolonge le bras naturel et perfectionne la main nue, l'ordinateur prolonge l'intelligence humaine naturelle et la perfectionne en certaines de ses spécificités.

L'ordinateur est un foyer d'intelligence artificielle , en ce sens qu'il est à même d'exécuter seul des tâches qui ne pouvaient s'effectuer jadis qu'à l'aide d'une activité cérébrale humaine consciente. Ainsi se substitue-t-il à du personnel bancaire, et, prenant la place des servants aux chaînes de montage, conduit-il à des usines sans ouvrier, ni syndicat ouvrier...

Cette évolution de l'humanité ne fut pas toujours continue, ni constante, ni égale partout. Elle connut des reculs momentanés locaux et le progrès a souvent procédé par des mutations, parfois brutales et douloureuses. Jacquard, l'inventeur du métier à tisser, fut jeté à la rivière. L'introduction de nouvelles machines à filer est mentionnée parmi les causes de la Révolution belge de 1830. La plupart des inventions cruciales furent rêvées par des penseurs imaginatifs des siècles avant de devenir réalité, et des signes avant-coureurs d'une découverte apparurent souvent longtemps avant sa réalisation.

Humaine et sociale, la mathématique reflète la société. En l'ère agricole artisanale, elle est écologique et respecte une règle des trois unités, regardées comme intangibles et immuables : Espace physique idéalisé, où tout se passe. Logique, en un sens large, comme elle apparaît dans l'oeuvre d'Aristote et les axiomes d'Euclide (comprenant notamment l'édifiant: la partie est plus petite que le tout). Nombre, objet de calcul.

La Révolution capitaliste industrielle fait sauter le triple carcan de la règle des trois unités. Après l'éclosion des géométries non euclidiennes, une grande partie de la mathématique se géométrise, exigeant un choix très riche d'espaces variés. La logique d'Aristote et les vérités premières d'Euclide elles-mêmes sont contestées, notamment par le diabolique impénitent Galileo Galilei. Diverses logiques et théories des ensembles se partagent désormais les faveurs des mathématiciens. Dès l'ère industrielle, les calculs les plus divers foisonnent, élargissant et enrichissant sans cesse l'univers des nombres et objets de calcul.

Aux impressionnants ensembles industriels capitalistes, font écho les grandes structures de la Mathématique moderne, qui préservent une intelligibilité globale après l'abandon des unités intangibles d'espace, de logique et de nombre. Mathématique moderne entend ici, par définition nominaliste, un recours conscient aux ensembles et aux structures de groupe, de champ, d'espace vectoriel, d'espace topologique, de catégorie ... L'exposé de ses Eléments culmine en l'oeuvre de Nicolas Bourbaki, publiée d'abord par Hermann, Paris, de manière significative, dans sa Collection des Actualités scientifiques et industrielles. Une certaine propagande a d'ailleurs présenté ses structures comme les machines-outils de la mathématique.

Le choc de l'ordinateur, si violent par certains de ses effets pernicieux immédiats, a pu installer la crainte qu'une menace iconoclaste pèse sur l'héritage culturel de la mathématique. Il n'en est heureusement rien, bien au contraire.

L'ordinateur est un cristal de mathématique moderne et d'une pédagogie de son enseignement ayant recours aux flèches. A chaque instant, l'ordinateur est un graphe de flèches bleues et de flèches rouges, comme il s'en trouve dans des manuels de mathématique moderne. Leurs articulations, ou sommets, sont habitées par des connectifs logiques qui descendent en ligne directe d'Aristote et de Socrate. Face à ton ordinateur personnel, vingt-cinq siècles - et peut-être quarante - de philosophie, de logique et de mathématique te contemplent !

La compréhension conceptuelle de l'ordinateur est devenue un élément impératif de l'humanisme contemporain. Le Connais-toi toi-même passe désormais par Connais l'ordinateur.

A l'origine de cet ouvrage, se trouve notamment cette affirmation de Bruno Marchal, à la onzième Rencontre du Groupe International de Recherche en Pédagogie de la mathématique, tenue en 1982, à

Arlon (Belgique), berceau d'un enseignememt moderne de la mathématique : "L'ordinateur est un graphe de flèches bleues et de flèches rouges, et ce coloriage, en évolution avec le temps, est la Pensée". Cet Auteur a rendu compte de ses exposés d'Arlon dans L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, seul document auquel le lecteur curieux puisse se reférer, car l'ouvrage annoncé par cet article ne s'est pas fait.

L'ordinateur en soi est une pure structure mathématique que le présent ouvrage introduit progressivement, et étudie de manière intuitive rigoureuse, sans exiger de prérequis spécial et sans recours à formalisme, ni technique mathématique tant soit peu poussée. Les quatre derniers chapitres seuls enfreignent peut-être cette louable intention, afin de doter de viatique ceux qui voudraient approfondir le sujet.

Oeuvre d'art abstrait, concret comme toute oeuvre d'art abstrait, l'ordinateur est d'abord et avant tout un graphe de flèches, appelé à s'enrichir progressivement. Autrement dit, l'ordinateur achevé admet un graphe sous-jacent, dit abstrait, ou mieux pur et simple, par renfort psychologique.

Les quatre premiers chapitres de cet ouvrage concernent exclusivement les graphes purs et simples.

Le premier chapitre précise en quoi les graphes d'ordinateur peuvent différer des graphes orientés classiques. Comme les graphes sous-jacents aux catégories, ils acceptent des pétales, ou flèches dont l'origine égale l'extrémité, et leurs sommets sont flèches du graphe, bien que, par vivacité de langue, flèche abrège presque toujours flèche non sommet. Le but de l'ordinateur est de traiter une information qui suit les routes fléchées du graphe. Des flèches sans origine, dites sensorielles, introduisent la donnée dans l'ordinateur, qui la traite; le résultat est diffusé dans l'environnement par des commandes, ou flèches sans extrémité. En graphe (d'ordinateur), toute flèche a donc une et une seule origine OU une et une seule extrémité (cet OU n'étant évidemment pas exclusif). Comme il se doit, la théorie revêt un aspect souverain en décrétant, tout naturellement, que tout sommet est, à la fois sa propre origine, et sa propre extrémité. Cette définition axiomatique permet de débarrasser utilement les sommets du caractère ponctuel qui leur est attribué par une tradition tenace, respectée par les premiers dessins du présent ouvrage. Le graphe d'ordinateur utilise à plein ce droit, en s'octroyant des sommets curvilignes, simultanément présents, tels des lignes de bus, en des points fort éloignés de la ville. Dans l'optique de cette définition ensembliste des graphes, les sous-graphes se présentent comme les parties de graphes qui comprennent les origines et les extrémités de leurs éléments. Comme les sommets sont appelés à devenir les centres nerveux de l'ordinateur, où s'opèreront les traitements locaux de l'information, à quoi servirait un sommet sans sortie (c'est-à-dire sans flèche dont il soit origine) ? Par axiome de commodité, en tout graphe ambiant considéré, chaque sommet sera toujours supposé doté d'au moins une sortie. Cette propriété n'est évidemment pas imposée aux sous-graphes des graphes ambiants.

Le chapitre 2 montre comment voir un graphe, à morphisme d'oubli près, réduisant un sous-graphe en l'un de ses sommets, véritable boîte noire ayant oublié son contenu. Le montage inverse épanouit, à contre morphisme, un sommet en un sous-graphe, mathématisant ainsi la démarche de montage, issue de la connaissance commune et de l'intelligence instrumentale.

La théorie classique des graphes orientés fait grand cas des noyaux, dont l'importance est attestée, notamment, par leurs applications au calcul opérationnel et en la théorie des jeux de von Neumann. On comprend, dès lors, que le chapitre 3 en veuille étendre la théorie aux graphes à sensorielles et commandes éventuelles. Si ces dernières ne posent aucun problème, les sensorielles jouent les perturbatrices. Comme La Vallée Poussin ramenait toute partie d'ensemble ambiant à sa fonction caractéristique, une en tout point de la partie, nulle en tout point de l'ensemble ambiant situé en dehors d'elle, le chapitre 3 ramène tout sousgraphe de graphe ambiant (soumis à l'axiome de commodité) à son coloriage caractéristique du graphe ambiant, qui rougit les flèches du sousgraphe et bleuit les autres. Les coloriages booliens, en bleu et rouge, s'introduisent ainsi tout naturellement en la théorie des graphes purs et simples, dès que celleci use de sousgraphes. Sans mot dire, tout sousgraphe peint son graphe ambiant en rouge et bleu; et vice versa. Un sous-graphe est nucléique lorsque, en tout sommet du graphe ambiant, la sortie est toute bleue ou toute rouge, selon qu'existe ou non, au moins une flèche d'entrée rouge en ce sommet. Le domaine d'un graphe étant l'ensemble des origines de ses flèches, les noyaux généralisés se définissent comme les domaines des sous-graphes nucléiques. En graphe dépourvu de sensorielle et de commande, on retrouve exactement les noyaux classiques. En l'absence de sensorielle, tout noyau est le domaine d'un et d'un seul sous-graphe nucléique. La présence de sensorielles pimente la situation en permettant parfois qu'un même noyau puisse être le domaine de plusieurs sous-graphes nucléiques.

L'optique adoptée en définissant les noyaux d'un graphe comme les domaines de ses sous-graphes nucléiques, permet de regarder le théorème 2 comme une version pure et simple d'un résultat fondamental dû à Christine Decaestecker, et sur lequel reviendra le chapitre 7. La définition directe des noyaux de graphes à sensorielles éventuelles, offerte par le théorème 2, prolonge une formulation classique en l'absence de sensorielle.

Le chapitre 4 dote les sommets des graphes purs et simples d'une pondération entière naturelle, jamais décroissante aux yeux d'un usager parcourant le graphe en respectant le sens des flèches, et stationnaire en les seuls endroits où le parcours emprunte un cycle du graphe. Tout sommet communique son poids à ses sorties, et les sensorielles prennent le poids -1. Il en résulte qu'en tout sommet, le poids de toute entrée égale au plus celui des sorties et qu'en tout sommet de graphe sans cycle non nul, le poids de chaque entrée est strictement plus petit que celui des sorties.

Le chapitre 5 quitte le monde intemporel marmoréen des graphes purs et simples, aux flèches incolores, inaccessibles aux passions, pour celui des graphes informatifs branchés, soumis à un inexorable temps, et où, à tout instant, chaque flèche affiche sans pudeur son état, en se vêtant toute entière d'une des couleurs d'une palette préassignée. La pensée d'un graphe informatif branché est son coloriage, en évolution avec le temps.

Les graphes fonctionnels sont des graphes informatifs où chaque sommet fonctionne fonctionnellement de manière individuelle indépendante. La pensée d'un graphe fonctionnel est la résultante globale des fonctionnements fonctionnels individuels indépendants de ses divers sommets. Apparaissant ici en version intentionnelle de causalité, le concept de fonction s'épanouit en fécondant son verbe.

En ordinateur concret, coloriages d'entrée et de sortie sont des états physiques, et comme, pour en changer, il faut, en général de l'énergie, le fonctionnement fonctionnel des graphes fonctionnels implique l'existence d'une infrastructure physique concrète, irriguant les sommets de l'énergie nécessaire à leur fonctionnement fonctionnel. Cette infrastructure physique tombe évidemment en dehors des préoccupations du présent exposé conceptuel pur.

Le théorème 5 montre que les graphes fonctionnels sans cycle non nul sont aussi sans problème, en ce sens que tout graphe fonctionnel, sans cycle non nul et à coloriage sensoriel maintenu constant, évolue spontanément vers un état stable, fonction exclusive de ce coloriage sensoriel. Par souplesse de langue, tout graphe fonctionnel sans cycle non nul se voit aussitôt sommet fonctionnel.

L'ordinateur ne fait nul mystère de son intelligence douée de mémoire, et ses réponses dépendent non seulement des questions posées, mais aussi de l'expérience emmagasinée. Dès lors, par le théorème 5, se trouve-t-il graphe à cycles.

De manière plus précise, l'ordinateur est un graphe boolien à cycles, où <u>graphe boolien</u> signifie graphe fonctionnel à palette réduite aux <u>couleurs de vérité</u> ou <u>bits</u>

<u>bleu</u> = 0 = <u>faux</u> = <u>éteint</u>

<u>rouge</u> = 1 = <u>vrai</u> = <u>allumé</u>

Tous les sommets sont égaux devant la loi fonctionnelle, ignorante des personnalités individuelles. Ainsi, le théorème d'évolution des graphes fonctionnels sans cycle s'est-il démontré en raisonnant exclusivement sur le comportement d'ensemble des montage de tout sommet de vérité à <u>n</u> entrées. Le montage noir de tout sommet boolien suit sans peine, en recourant à quelques OU de ramification.

Joignant l'utile à l'agréable, l'exposé de cette démonstration fixe les idées en réalisant un montage noir de l' <u>Additionneur Naturel Elémentaire</u> (ANE) qui exhibe le binaire à deux chiffres du = x+y+z en réponse à l'entrée des trois sommands de vérité x , y , z .

En fait, l' ANE se borne à restituer, sur commande, les sommes x+y+z qui lui ont été préalablement soufflées à l'oreille. Sur la lancée, l'additionneur binaire de tout couple de naturels binaires se monte en noir d'une manière édifiante. On n'est plus contraint cette fois de communiquer préalablement à l'appareil la table des 2^{2n} additions concernées. Bien au contraire, une expression graphique flèchée de la règle d'addition binaire <u>est en soi</u> un montage répondant au problème.

Plutôt qu'application de théories préexistantes, l'ordinateur est de la mathématique en soi. Le <u>logarithme entier</u>, de base deux, retrouve et magnifie sa vocation première de <u>codeur</u>. Graphes issus d'une pédagogie de la mathématique moderne et de la théorie des catégories qui remonte à Socrate et Aristote, logarithmes et exponentielles si prestigieuses en Analyse mathématique, et connectifs aristotéliciens drapés d'humanisme, concertent en ordinateur. Enfin, un pétale à sommet noir doté de sortie, le munit d'un mouvement perpétuel de coeur battant périodique, sommets fonctionnels, sans le moindre égard pour les personnalités individuelles. Le chapitre 6 traite chacun selon ses grades et qualités et accueille notamment les sommets de vérité ET OU NON , reliques conservées par l'héritage aristotélicien, dont la sémantique logique cède ici le pas au fonctionnalisme pur.

Les OU curvilignes sont les lignes de bus diffusant, en des points, parfois fort éloignés les uns des autres, une information d'un bit, que des ET ponctuels permettent de LIRE ou NON .

La sortie d'anonymat des sommets booliens échappe au bariolage cacophonique, car, par le théorème de Sheffer-Pierce, tout sommet boolien se monte au moyen de sommets de vérité d'un seul type, les exclusions, encore dits sommets noirs, ou sommets NI , issus de la connaissance commune comme l'atteste la présence du mot NI dans la langue vernaculaire.

La fonction de vérité NI est une
si et seulement si son entrée globale est nulle.

L'enfance de l'art monte en noir les ET OU NON. Afin d'établir le théorème de Pierce en toute généralité, on commence par monter en noir les sommets exponentiels (de base deux), ou décodeurs, et on remarque ensuite qu'un exponentiel à n entrées suivi, en série par un OU collecteur à 2^n entrées suffit au secrétant un courant informatif alterné, et constitue l'âme de toutes les variantes de coeurs d'ordinateur.

Le chapitre 6 se termine en point d'orgue de vérité, sommet de vérité à $n + 2^n$ entrées : les n premières d'entre elles, les seules dites entrées, permettent l'introduction de tout mot binaire x à n bits; les 2^n restantes nommées contrôles, accueillent tout code B de fonction de vérité à n entrées; l'orgue fournit en retour la valeur (B x) . Dans le cas n=6 , ce sommet , alors à 6 entrées et $2^6 = 64$ contrôles, permet de jouer le nombre fabuleux de 2^{64} fonctions de vérité.

Le théorème de Christine Decaestecker, déjà évoqué au chapitre 2, reparaît, en noir, au chapitre 7, pour affirmer que les restrictions rouges des coloriages stables de graphe noir sont les sous-graphes nucléiques du graphe pur et simple sous-jacent. Comme tout sommet de graphe boolien se monte en noir, ce théorème ramène l'étude de la stabilité des graphes booliens à un problème de graphes purs et simples, et permet de déterminer les états stables à partir des noyaux du graphe pur et simple sous-jacent à un montage noir.

Le chapitre s'achève par la présentation de quelques variantes de l'aller-retour à sommets noirs, ou flipflop, minuscule logarithme binaire à sortie simple et entrée double, qui mémorise par l' annulation de celle-ci. Les flipflops seront les chevilles ouvrières de la mémorisation , objet du chapitre suivant.

Le chapitre 8 construit l'élément de mémoire, ou registre à un bit, en montant en série un exponentiel contrôlé à une entrée, suivi d'un logarithme à deux entrées (et un contrôle de sortie). Les registres à n bits sont les mémoires pour un mot binaire à n bits. S'installe ensuite, un réseau informatif, interne à l'ordinateur, entre au plus 2^m registres à n bits, numérotés par des mots binaires à m bits. Il fonctionne conformément à des habitudes courantes en la connaissance commune : formant le numéro a de l'un de ces registres sur un exponentiel contrôlé à m bits nommé LIRE, et le numéro binaire b d'un autre de ces registres sur un exponentiel contrôlé nommé ECRIRE, le mot enfermé dans le registre numéroté a s'écrira dans le registre numéroté b.

Au chapitre 9 , l'ordinateur devient automate , en exécutant un programme, codé en mots binaires à n bits, par le déroulement automatique de la litanie, tant prônée par Leibniz, des naturels binaires à n bits. Comme, pour les unités binaires, un pétale à sommet noir doté de sortie suffit à la tâche, reste à le faire travailler de concert avec d'autres coeurs battants, deux, quatre, huit ... fois plus lents. Ceux-ci s'obtiennent grâce au ralentisseur binaire, constitué de deux flipflops à deux sorties, montés en croix, à la Möbius, précédés d'un arbre d'entrée à double ramure. Comptant ses battements, le coeur s'est érigé en horloge.

Ainsi s'achève une présentation de l'ordinateur, économe en prérequis et en technique. Les quatre derniers chapitres offrent des compléments destinés à aider ceux qui désireraient approfondir le sujet.

Le chapitre 10 étudie les symétries du monde boolien, régi par un Vierergruppe de Klein , et montre comment les monter en noir.

Le chapitre 11 calcule et évalue le nombre des fonctions de vérité à 6 entrées , qui n'est autre que le célèbre nombre de l'échiquier 2^{64} , occasion de montrer comment surpasser la puissance d'un appareil.

Le chapitre 12 polynomise la théorie, en établissant que toute fonction de vérité à n variables s'exprime, de manière unique, en polynome formel, à coefficients de vérité, en n variables de vérité. La polynomisation de l'exponentielle fait la synthèse avec la fonction de Kronecker.

Le chapitre dessert, sur l'associativité, est un caprice du Chef.